

## W PEŁNI BRZEGOWE SFORMUŁOWANIE MEB DLA NIEUSTALONEJ DYFUZJI CIEPŁA

*Ewa Majchrzak<sup>1,2</sup>, Maria Lupa<sup>2</sup>, Ewa Ładyga<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Politechnika Śląska, Gliwice*

<sup>2</sup>*Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska*

**Streszczenie.** Zastosowanie metody elementów brzegowych do modelowania nieustalanej dyfuzji ciepła wiąże się z koniecznością dyskretyzacji zarówno brzegu, jak i wnętrza obszaru. W pracy przedstawiono taki wariant tej metody, w którym występują tylko całki związane z brzegiem obszaru. Wykorzystano przy tym rozwiązanie fundamentalne niezależne od czasu. Pokazano przykład obliczeń rozkładu temperatury w obszarze płaskim zorientowanym w prostokątnym układzie współrzędnych.

### Wstęp

Rozpatrywać będziemy równanie nieustalanej dyfuzji ciepła

$$x \in \Omega : c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T(x,t) \quad (1)$$

gdzie  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła,  $c$  - ciepłem właściwym odniesionym do jednostki objętości,  $T$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $t$  oznaczają temperaturę, współrzędne geometryczne i czas. Równanie (1) uzupełniają odpowiednie warunki brzegowo-początkowe.

W literaturze, np. [1-3], omówione są różne algorytmy metody elementów brzegowych, pozwalające rozwiązać tak sformułowane zadanie. Najpopularniejsze z nich to pierwszy i drugi schemat MEB, metoda kombinowana, w której najpierw aproksymuje się pochodną względem czasu odpowiednim ilorazem różnicowym, a następnie stosuje się rozwiązanie fundamentalne zależne jedynie od współrzędnych geometrycznych. Brzegowe równania całkowe odpowiadające tym wariantom MEB zawierają jednak całki po wnętrzu obszaru, co powoduje, że na etapie realizacji numerycznej należy dyskretyzować zarówno brzeg, jak i jego wnętrze.

Jedną z prób ominięcia tych niedogodności jest rozwijanie algorytmów MEB, które pozwalają sprowadzić całkę po wnętrzu obszaru do szeregu całek brzegowych, np. [4]. Otrzymuje się wówczas w pełni brzegowe sformułowanie. W niniejszym artykule omówiono taki właśnie wariant MEB.

## 1. W pełni brzegowe sformułowanie MEB

Ustalone pole temperatury w obszarze  $\Omega$ , w którym działają wewnętrzne źródła ciepła  $Q(x)$ , opisuje następujące równanie:

$$x \in \Omega : \lambda \nabla^2 T(x) + Q(x) = 0 \quad (2)$$

uzupełnione odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Brzegowe równanie całkowe dla tak sformułowanego zadania ma postać

$$\begin{aligned} B(\xi)T(\xi) + \int_{\Gamma} U_0^*(\xi, x)q(x)d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} W_0^*(\xi, x)T(x)d\Gamma + \int_{\Omega} Q(x)U_0^*(\xi, x)d\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie  $\Gamma$  jest brzegiem obszaru  $\Omega$ ,  $\xi$  - punktem obserwacji,  $B(\xi) \in (0,1]$ ,  $U_0^*(\xi, x)$  - rozwiązaniem fundamentalnym postaci

$$U_0^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{1}{r} \quad (4)$$

gdzie  $r$  jest odległością między punktami  $\xi$  i  $x$

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad (5)$$

$$W_0^*(\xi, x) = -\lambda \frac{\partial U_0^*(\xi, x)}{\partial n} = \frac{d}{2\pi r^2} \quad (6)$$

przy czym

$$d = (x_1 - \xi_1)\cos \alpha_1 + (x_2 - \xi_2)\cos \alpha_2 \quad (7)$$

gdzie  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$  są cosinusami kierunkowymi wektora normalnego  $n$ .

W równaniu (3)  $q(x)$  jest strumieniem ciepła

$$q(x) = -\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial n} \quad (8)$$

Brzegowe równanie całkowe (3) można zastosować do równania (1), podstawiając

$$Q(x) = -c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (9)$$

i wówczas

$$\begin{aligned} & B(\xi)T(\xi, t) + \int_{\Gamma} U_0^*(\xi, x)q(x, t)d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} W_0^*(\xi, x)T(x, t)d\Gamma - c \int_{\Omega} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} U_0^*(\xi, x)d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

Zajmiemy się przekształceniem ostatniej całki w tym równaniu, czyli

$$I = -c \int_{\Omega} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} U_0^*(\xi, x)d\Omega \quad (11)$$

Zakładamy, że znamy funkcję  $U_1^*(\xi, x)$ , która jest rozwiązaniem równania

$$\nabla^2 U(\xi, x) = U_0^*(\xi, x) \quad (12)$$

Wykorzystujemy drugą formułę Greena [3]

$$\begin{aligned} I = -c \int_{\Omega} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \nabla^2 U_1^*(\xi, x)d\Omega = -c \int_{\Omega} \nabla^2 \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] U_1^*(\xi, x)d\Omega + \\ - c \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \frac{\partial U_1^*(\xi, x)}{\partial n} - U_1^*(\xi, x) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

Na podstawie równania (1) mamy

$$\nabla^2 T(x, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (14)$$

gdzie  $a = \lambda/c$  jest współczynnikiem dyfuzji. Stosując następujące zależności:

$$\nabla^2 \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla^2 T(x, t)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} \right] = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad (16)$$

mamy

$$\begin{aligned} I = -\frac{c}{a} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} U_1^*(\xi, x)d\Omega + \\ + \frac{1}{a} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} W_1^*(\xi, x) - U_1^*(\xi, x) \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie

$$W_1^*(\xi, x) = -\lambda \frac{\partial U_1^*(\xi, x)}{\partial n} \quad (18)$$

Następnie zakładamy, że znamy postać funkcji  $U_2^*(\xi, x)$  takiej, że

$$\nabla^2 U_2^*(\xi, x) = U_1^*(\xi, x) \quad (19)$$

i obliczamy całkę

$$I_1 = -\frac{c}{a} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} U_1^*(\xi, x) d\Omega \quad (20)$$

stosując ponownie drugą formułę Greena

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{c}{a} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \nabla^2 U_2^*(\xi, x) d\Omega = -\frac{c}{a} \int_{\Omega} \nabla^2 \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \right] U_2^*(\xi, x) d\Omega + \\ & -\frac{c}{a} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \frac{\partial U_2^*(\xi, x)}{\partial n} - U_2^*(\xi, x) \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \right] \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

Ponieważ

$$\nabla^2 \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \nabla^2 T(x, t) \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{a} \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial t^3} \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial T(x, t)}{\partial n} \right] = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} \quad (23)$$

mamy więc

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{c}{a^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^3 T(x, t)}{\partial t^3} U_2^*(\xi, x) d\Omega + \\ & + \frac{1}{a^2} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial t^2} W_2^*(\xi, x) - U_2^*(\xi, x) \frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial t^2} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie

$$W_2^*(\xi, x) = -\lambda \frac{\partial U_2^*(\xi, x)}{\partial n} \quad (25)$$

Całka  $I$  jest równa

$$\begin{aligned}
 I = & -\frac{c}{a^2} \int_{\Omega} \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial t^3} U_2^*(\xi, x) d\Omega + \\
 & + \frac{1}{a} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} W_1^*(\xi, x) - U_1^*(\xi, x) \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} \right] d\Gamma + \\
 & + \frac{1}{a^2} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} W_2^*(\xi, x) - U_2^*(\xi, x) \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} \right] d\Gamma
 \end{aligned} \quad (26)$$

Postępując w podobny sposób nieskończenie wiele razy, otrzymujemy

$$I = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{a^l} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial^l T(x,t)}{\partial t^l} W_l^*(\xi, x) - U_l^*(\xi, x) \frac{\partial^l q(x,t)}{\partial t^l} \right] d\Gamma \quad (27)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 U_l^*(\xi, x) &= U_{l-1}^*(\xi, x), \quad l=1,2,3,\dots \\
 W_l^*(\xi, x) &= -\lambda \frac{\partial U_l^*(\xi, x)}{\partial n}
 \end{aligned} \quad (28)$$

Wzór (27) wprowadzamy do brzegowego równania całkowego (10) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 B(\xi) T(\xi, t) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a^l} \int_{\Gamma} U_l^*(\xi, x) \frac{\partial^l q(x,t)}{\partial t^l} d\Gamma = \\
 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{a^l} \int_{\Gamma} W_l^*(\xi, x) \frac{\partial^l T(x,t)}{\partial t^l} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (29)$$

i uzyskujemy równanie całkowo-różniczkowe, w którym pochodne rzędu zerowego oznaczają te same funkcje.

## 2. Dyskretyzacja względem czasu

W pierwszej kolejności dokonujemy dyskretyzacji rozpatrywanego przedziału czasu  $[t^0, t^f]$ , wprowadzając siatkę ze stałym krokiem  $\Delta t = t^f - t^{f-1}$

$$0 < t^0 < t^1 < \dots < t^{f-1} < t^f < \dots < t^F < \infty \quad (30)$$

Na odcinku czasu  $[t^{f-1}, t^f]$  zakładamy liniową aproksymację funkcji temperatury i strumienia ciepła, czyli

$$\begin{aligned}
T(x,t) &= \frac{t^f - t}{\Delta t} T(x, t^{f-1}) + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} T(x, t^f) = \frac{t^f - t}{\Delta t} T^{f-1} + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} T^f \\
q(x,t) &= \frac{t^f - t}{\Delta t} q(x, t^{f-1}) + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} q(x, t^f) = \frac{t^f - t}{\Delta t} q^{f-1} + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} q^f
\end{aligned} \quad (31)$$

Obliczamy pochodne pierwszego rzędu względem czasu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} (T^f - T^{f-1}) \\
\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} (q^f - q^{f-1})
\end{aligned} \quad (32)$$

i są one niezależne od czasu, czyli pochodne wyższych rzędów są równe zero.

Dla  $t \in [t^{f-1}, t^f]$  otrzymujemy następującą dyskretyzację równania (29)

$$\begin{aligned}
& B(\xi) \left( \frac{t^f - t}{\Delta t} T^{f-1} + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} T^f \right) + \\
& + \int_{\Gamma} U_0^*(\xi, x) \left( \frac{t^f - t}{\Delta t} q^{f-1} + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} q^f \right) d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} U_1^*(\xi, x) (q^f - q^{f-1}) d\Gamma = \\
& = \int_{\Gamma} W_0^*(\xi, x) \left( \frac{t^f - t}{\Delta t} T^{f-1} + \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} T^f \right) d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} W_1^*(\xi, x) (T^f - T^{f-1}) d\Gamma
\end{aligned} \quad (33)$$

lub po dokonaniu pewnych przekształceń

$$\begin{aligned}
& \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} \int_{\Gamma} U_0^*(\xi, x) q^f d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} U_1^*(\xi, x) q^f d\Gamma = \\
& = \frac{t - t^{f-1}}{\Delta t} \left[ \int_{\Gamma} W_0^*(\xi, x) T^f d\Gamma - B(\xi) T^f \right] + \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} W_1^*(\xi, x) T^f d\Gamma + \\
& + \frac{t^f - t}{\Delta t} \left[ \int_{\Gamma} W_0^*(\xi, x) T^{f-1} d\Gamma - B(\xi) T^{f-1} \right] - \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} W_1^*(\xi, x) T^{f-1} d\Gamma + \\
& - \frac{t^f - t}{\Delta t} \int_{\Gamma} U_0^*(\xi, x) q^{f-1} d\Gamma + \frac{1}{a\Delta t} \int_{\Gamma} U_1^*(\xi, x) q^{f-1} d\Gamma
\end{aligned} \quad (34)$$

Oczywiście, zastosowanie algorytmu wymaga znajomości funkcji  $U_1^*(\xi, x)$ ,  $W_1^*(\xi, x)$ . Są to funkcje postaci [4]:

$$U_1^*(\xi, x) = \frac{r^2}{8\pi\lambda} \left( \ln \frac{1}{r} + 1 \right) \quad (35)$$

$$W_1^*(\xi, x) = -\frac{d}{8\pi} \left( 2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right) \quad (36)$$

### 3. Dyskretyzacja względem współrzędnych geometrycznych

Brzeg obszaru dzielimy na  $N$  stałych elementów brzegowych  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . Całki występujące w równaniu (34) zastępujemy sumą całek po tych elementach, a wartości temperatury i strumieni ciepła aproksymujemy ich wartościami w środkach tych elementów, czyli

$$x \in \Gamma_j : \begin{cases} T(x, t^f) = T(x^j, t^f) = T_j^f \\ T(x, t^{f-1}) = T(x^j, t^{f-1}) = T_j^{f-1} \\ q(x, t^f) = q(x^j, t^f) = q_j^f \\ q(x, t^{f-1}) = q(x^j, t^{f-1}) = q_j^{f-1} \end{cases} \quad (37)$$

Otrzymujemy następującą aproksymację równania (34)

$$\begin{aligned} & \frac{t-t^{f-1}}{\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j^f + \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij}^1 q_j^f = \frac{t-t^{f-1}}{\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij} T_j^f + \\ & + \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij}^1 T_j^f + \frac{t^f-t}{\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij} T_j^{f-1} - \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij}^1 T_j^{f-1} + \\ & - \frac{t^f-t}{\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j^{f-1} + \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij}^1 q_j^{f-1} \end{aligned} \quad (38)$$

gdzie

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^*(\xi^i, x) d\Gamma_j \quad (39)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} q^*(\xi^i, x) d\Gamma_j, & i \neq j \\ -0.5, & i = j \end{cases} \quad (40)$$

$$G_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} U_1^*(\xi^i, x) d\Gamma_j \quad (41)$$

$$H_{ij}^{-1} = \int_{\Gamma_j} W_1^*(\xi^i, x) d\Gamma_j \quad (42)$$

Jeśli założymy, że na rozpatrywanym odcinku czasu  $[t^{f-1}, t^f]$  nie zmieniają się warunki brzegowe i przyjmiemy  $t = t^f$ , wówczas równanie (38) upraszcza się do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left( G_{ij} + \frac{1}{a\Delta t} G_{ij}^1 \right) q_j^f &= \sum_{j=1}^N \left( H_{ij} + \frac{1}{a\Delta t} H_{ij}^1 \right) T_j^f + \\ &- \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij}^1 T_j^{f-1} + \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij}^1 q_j^{f-1} \end{aligned} \quad (43)$$

Równania rozpisujemy dla wszystkich węzłów brzegowych  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . W ten sposób otrzymujemy układ równań algebraicznych, do którego wprowadzamy odpowiednie warunki brzegowe. Po jego rozwiązaniu znane są wartości temperatury  $T_j^f$  oraz strumieni ciepła  $q_j^f$  we wszystkich węzłach brzegowych. Temperaturę w dowolnych punktach wewnętrznych wyznaczamy z zależności

$$\begin{aligned} T_i^f &= \sum_{j=1}^N \left( H_{ij} + \frac{1}{a\Delta t} H_{ij}^1 \right) T_j^f - \sum_{j=1}^N \left( G_{ij} + \frac{1}{a\Delta t} G_{ij}^1 \right) q_j^f + \\ &- \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N H_{ij}^1 T_j^{f-1} + \frac{1}{a\Delta t} \sum_{j=1}^N G_{ij}^1 q_j^{f-1} \end{aligned} \quad (44)$$

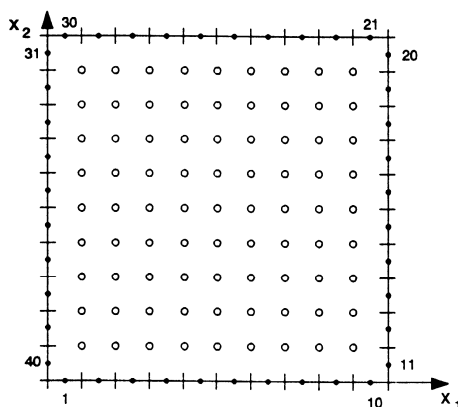
Otrzymane rozwiązanie stanowi warunek pseudopoczątkowy dla następnego kroku obliczeń, czyli przejścia  $t^f \rightarrow t^{f+1}$ .

#### 4. Przykład obliczeń

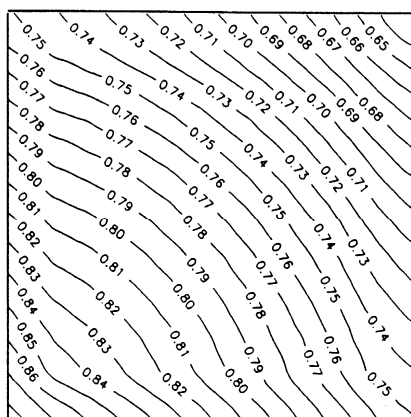
Analizowano proces nieustalonego przepływu ciepła w nieskończonym pręcie o przekroju kwadratowym (długość boku 0.5). Brzeg obszaru podzielono na 40 stałych elementów brzegowych.

Na rysunku 1 pokazano przyjętą dyskretyzację oraz zaznaczono położenie węzłów wewnętrznych, w których obliczano wartości temperatury. Zagadnienie sformułowano w postaci bezwymiarowej. Na dolnym i lewym boku kwadratu założono warunek izolacji cieplnej, a na pozostałych bokach konwekcyjną wymianę ciepła z otoczeniem o temperaturze równej zero i liczbie Biota 0.5. Jako warunek początkowy przyjęto temperaturę równą jeden. Obliczenia przeprowadzono z bezwymiarowym krokiem czasu równym 0.2. Na rysunkach 2 i 3 pokazano rozkłady temperatury dla bezwymiarowych czasów 0.2 i 0.4.

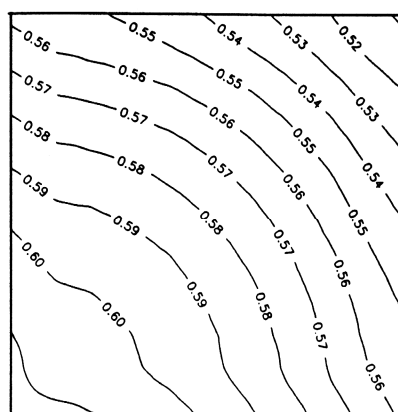




Rys. 1. Dyskretyzacja brzegu i punkty wewnętrzne



Rys. 2. Rozkład temperatury dla czasu 0.2



Rys. 3. Rozkład temperatury dla czasu 0.4

Wyniki obliczeń porównano z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą metody elementów brzegowych z dyskretyzacją czasu [5]. Stosując ten wariant MEB konieczna jest dyskretyzacja zarówno brzegu, jak i wnętrza obszaru. W tym celu wnętrze podzielono na 100 stałych elementów wewnętrznych (kwadratów). Wyniki otrzymane za pomocą obydwu wariantów niewiele się różniły.

## Literatura

- [1] Banerjee P.K., Boundary element methods in engineering, McGraw-Hill Book Company, London 1994.
- [2] Brebbia C.A., Domingues J., Boundary elements, an introductory course, Computational Mechanics Publications, McGraw-Hill Book Company, London 1992.

- [3] Majchrzak E., Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła, Wyd. Pol. Częstochowskiej, Częstochowa 2001.
- [4] Nowak A.J., Metoda elementów brzegowych z zastosowaniem wielokrotnej zasady wzajemności, Wyd. Pol. Śląskiej, Energetyka 116, Gliwice 1993.
- [5] Ładyga E., Zastosowanie metody elementów brzegowych do modelowania nieustalanej dyfuzji, Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, Częstochowa 1997.