

## WPLYW PARAMETRÓW TECHNOLOGICZNYCH NA PRZEBIEG KRZEPNIĘCIA WLEWKA CIĄGŁEGO

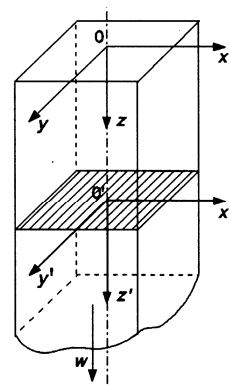
*Romuald Szopa, Jarosław Siedlecki*

*Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska*

**Streszczenie.** W pracy zostanie przedstawiony sposób wykorzystania metod analizy wrażliwości do oceny wpływu warunków technologicznych (z matematycznego punktu widzenia warunków brzegowych i początkowych) na przebieg krzepnięcia stalowego wlewka ciągłego. Analiza wrażliwości pola temperatury dotyczy zadania nieustalonego i silnie nieliniowego. Model matematyczny procesu COS bazuje na metodzie wędrującego przekroju poprzecznego. Na etapie obliczeń numerycznych wykorzystano metodę bilansów elementarnych.

### 1. Sformułowanie zadania

Procesy krzepnięcia i stygnięcia wlewka ciągłego opisuje równanie energii z dodatkowym składnikiem, będącym iloczynem skalarnym gradientu temperatury i pola prędkości. Jest to typowy składnik w równaniu energii, w którym uwzględnia się konwekcję. W rozważaniach prezentowanych w niniejszej pracy efekty konwekcyjne będą pominięte, natomiast pole prędkości wynika z przemieszczenia się wlewka przez urządzenie do ciągłego odlewania. Procesy cieplne zachodzące w objętości wlewka ciągłego opisano wykorzystując tzw. metodę jednego obszaru [1, 2], co sprowadza się do zdefiniowania zastępczej pojemności cieplnej materiału, w której w odpowiedni sposób uwzględnia się utajone ciepło krzepnięcia. Dokładne omówienie różnorodnych sposobów definiowania tego parametru można znaleźć między innymi w [3, 4]. Tak więc rozpatrywać będziemy prostokątny wlewek ciągły wytwarzany na urządzeniu pionowym. Wlewek przemieszcza się w kierunku osi  $z$  z prędkością  $u$  (czyli pole prędkości w rozpatrywanym układzie:  $\vec{u} = [0, 0, u]$  - rys. 1).



Rys. 1. Wlewek ciągły

Nieustalone pole temperatury w objętości wlewka opisuje równanie w postaci

$$C(T) \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1)$$

gdzie  $T = T(x,y,z,t)$ ,  $C$ ,  $\lambda$  oznaczają zastępczą pojemność cieplną, odniesioną do jednostki objętości i współczynnika przewodzenia.

Warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni wlewka przyjmują postać bądź warunków Neumanna (zadany strumień ciepła), bądź warunków Robina. Tutaj założono znajomość współczynników wymiany ciepła, czyli

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_w) \quad (2)$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem wymiany ciepła,  $T_w$  temperaturą wody chłodzącej,  $\partial/\partial n$  pochodną normalną. Na górnej powierzchni wlewka (powierzchni ciekłego metalu) można przyjąć warunek Dirichleta

$$T = T_p \quad (3)$$

gdzie  $T_p$  jest temperaturą zalewania. Na umownie przyjętej powierzchni ograniczającej układ od dołu (strefa chłodzenia końcowego) założono warunek adiabatyczny ( $\partial T/\partial n = 0$ ). Warunek początkowy zadania sprowadza się do założenia, że pewna porcja ciekłego metalu bezpośrednio nad drągiem rozruchowym ma temperaturę zalewania. W modelu prezentowanym w niniejszym rozdziale, bazującym na metodzie wędrującego przekroju poprzecznego, warunek początkowy formułuje się w nieco inny sposób.

Liczne badania eksperymentalne pokazują, że w przypadku technologii COS można pominąć składową kondukcyjną w kierunku przesuwu wlewka (stanowi ona około 5% strumienia ciepła oddawanego od osi do brzegu). Tak więc równanie (1) można uprościć do postaci

$$C(T) \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

W metodzie wędrującego przekroju wprowadzamy układ współrzędnych związany z przemieszczającym się przekrojem wlewka:  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z - ut$  [5]. Jak łatwo sprawdzić, „gubi się” w ten sposób składnik zawierający pierwszą pochodną względem współrzędnej  $z$

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y'} \right) \quad (5)$$

Ostatnie równanie odpowiada typowemu 2D równaniu parabolicznemu. Na etapie obliczeń numerycznych uzyskuje się pola temperatury w kolejnych wyróżnionych przekrojach  $z = \text{const}$ , czyli rozwiązanie 3D, chociaż bazowe równanie różniczkowe odpowiadało obszarowi płaskiemu.

Warunkiem początkowym dla zadania, w którym wprowadzono wędrujący przekrój poprzeczny, jest pole temperatury dla  $z = 0$ , czyli temperatura zalewania.

Symulację zmniejszających się warunków brzegowych na powierzchni wlewka realizuje się bardzo prosto. Załóżmy że  $\Delta t_1$  jest czasem przebywania wlewka w krystalizatorze. Na odcinku czasu  $[0, \Delta t_1]$  na obwodzie wlewka przyjmuje się warunek brzegowy odpowiadający strefie chłodzenia pierwotnego (odpowiednią wartość  $\alpha$  lub strumienia ciepła). Jeżeli z kolei  $\Delta t_2$  jest czasem przybywania wyróżnionego przekroju w pierwszym sektorze strefy chłodzenia wtórnego, to dla czasów z przedziału  $[\Delta t_1, \Delta t_1 + \Delta t_2]$  na obwodzie przyjmujemy współczynnik wymiany ciepła dla tego sektora itd. Z formalnego punktu widzenia „wędrujący” przekrój został unieruchomiony, a jego przemieszczanie się przez urządzenie COS symulują zmieniające się na obwodzie warunki brzegowe. W powyższym modelu nie formułuje się oczywiście warunku na umownie przyjętej dolnej powierzchni wlewka. Podsumowując powyższe rozważania, proces krzepnięcia i stygnięcia stalowego wlewka ciągłego można opisać następującym układem równań i warunków:

$$\begin{cases} (x', y') \in \Omega & : & C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y'} \right) \\ (x', y') \in \Gamma & : & -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha (T - T_w) \\ t = 0 & : & T = T_p \end{cases} \quad (6)$$

## 2. Analiza wrażliwości względem współczynnika wnikania

Rozpatrywać będziemy procesy cieplne zachodzące w obszarze krystalizatora. Kinetyka krzepnięcia wlewka, a szczególnie grubość jego naskórka na wyjściu z tej strefy chłodzenia ma bardzo duże znaczenie dla prawidłowej i bezawaryjnej pracy urządzenia COS. Zakładamy, że oddziaływanie krystalizatora zastąpiono warunkiem Robina z zastępczym współczynnikiem wymiany ciepła.

Analiza wrażliwości względem  $\alpha$  wymaga zróżniczkowania równań (6) po tym parametrze [6, 7]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C(T)}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + C(T) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{\partial \lambda(T)}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial x'} + \lambda(T) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{\partial \lambda(T)}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial y'} + \lambda(T) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial y'} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

czyli, oznaczając  $\partial T / \partial \alpha = U$  i  $x' = x$ ,  $y' = y$ , mamy

$$\begin{aligned} & \frac{dC(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial t} + C(T) \frac{\partial U}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial U}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

Ostatnie równanie zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} C(T) \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \\ & - \frac{dC(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

lub

$$C(T) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \right) + Q_U \quad (10)$$

gdzie

$$Q_U = - \frac{dC(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (11)$$

Funkcja  $Q_U$  odpowiada wydajności źródeł wewnętrznych w typowym równaniu Fouriera. Jeżeli, co w przypadku stali nie wprowadza zbyt dużego błędu, założymy stałą wartość współczynnika przewodzenia, to

$$Q_U = - \frac{dC(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

Różniczkowanie warunków Robina prowadzi do zależności

$$- \frac{\partial \lambda(T)}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda(T) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = T - T_w + \alpha \frac{\partial T}{\partial \alpha} \quad (13)$$

Wykorzystujemy, jak poprzednio, twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej oraz zmianie kolejności różniczkowania i otrzymujemy

$$- \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda(T) \frac{\partial U}{\partial n} = T - T_w + \alpha U \quad (14)$$

lub

$$-\lambda(T) \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{d\lambda(T)}{dT} U \frac{\partial T}{\partial n} + T - T_w + \alpha U \quad (15)$$

Dla stałej wartości  $\lambda$  warunek Robina upraszcza się do postaci

$$-\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = \alpha U + T - T_w = \alpha(U - U_w) \quad (16)$$

gdzie

$$U_w = \frac{T_w - T}{\alpha} \quad (17)$$

Opis matematyczny wrażliwości uzupełnia zerowy warunek początkowy i ostatecznie dochodzi się do następującego zadania brzegowo-początkowego:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \Omega : C(T) \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \right) + Q_0 \\ (x, y) \in \Gamma : -\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = \alpha(U - U_w) \\ t = 0 : U = 0 \end{array} \right. \quad (18)$$

Podobnie jak w przypadku zadań liniowych rozwiązanie problemu wrażliwości wymaga znajomości rozwiązania problemu podstawowego. Z numerycznego punktu widzenia, a w szczególności możliwość wykorzystania metody bilansów, stopień trudności budowy algorytmu dla zadania dodatkowego nie odbiega istotnie od klasycznych algorytmów MBE.

W składnikach źródłowych występują pochodne zastępczej pojemności cieplnej i współczynnika przewodzenia. Oznacza to, że funkcje  $C(T)$  i  $\lambda(T)$  muszą być określonego rzędu gładkości (klasy  $C^1$ ). W realizacji numerycznej założenie to nie musi być spełnione, należy tylko odpowiednio zdefiniować pochodne w punktach nieciągłości.

### 3. Analiza wrażliwości względem temperatury zalewania

Rozpatrywać będziemy, jak poprzednio, procesy cieplne zachodzące w obszarze krystalizatora urządzenia COS. Zakładamy również, że oddziaływanie krystalizatora zastąpiono warunkiem Robina z zastępczym współczynnikiem wymiany ciepła.

Analiza wrażliwości względem temperatury zalewania, czyli warunku początkowego, wymaga zróżnicowania równań (6) po tym parametrze

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C(T)}{\partial T_p} \frac{\partial T}{\partial t} + C(T) \frac{\partial}{\partial T_p} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T_p} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T) \frac{\partial}{\partial T_p} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T_p} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial}{\partial T_p} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

przy czym dla współrzędnych przestrzennych pominięto wskaźnik ( $x' = x, y' = y$ ).  
Pochodną  $\partial T / \partial T_p$  oznaczmy symbolem  $V$  i otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \frac{dC(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial t} + C(T) \frac{\partial V}{\partial t} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial V}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Ostatnie równanie zapiszemy w postaci

$$C(T) \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \right) + Q_v \quad (21)$$

gdzie

$$Q_v = - \frac{dC(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{d\lambda(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (22)$$

Jeżeli założymy stałą wartość współczynnika przewodzenia, to

$$Q_v = - \frac{dC(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

Różniczkowanie warunków Robina prowadzi do zależności

$$- \frac{\partial \lambda(T)}{\partial T_p} \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda(T) \frac{\partial}{\partial T_p} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \alpha \frac{\partial T}{\partial T_p} \quad (24)$$

Wykorzystujemy twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej oraz o zmianie kolejności różniczkowania i otrzymujemy

$$- \frac{d\lambda(T)}{dT} V \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda(T) \frac{\partial V}{\partial n} = \alpha V \quad (25)$$

Dla stałej wartości  $\lambda$  warunek Robina upraszcza się do postaci

$$-\lambda \frac{\partial V}{\partial n} = \alpha(V - V_w) \quad (26)$$

gdzie

$$V_w = 0 \quad (27)$$

dla  $t = 0$

$$V = 1 \quad (28)$$

Ostatecznie dochodzimy do następującego zadania brzegowo-początkowego (dla stałej wartości  $\lambda$ ):

$$\begin{cases} (x, y) \in \Omega & : & C(T) \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \right) + Q_V \\ (x, y) \in \Gamma & : & -\lambda \frac{\partial V}{\partial n} = \alpha(V - V_w) \\ t = 0 & : & V = 1 \end{cases} \quad (29)$$

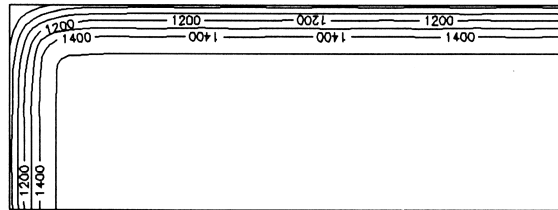
przy czym funkcja  $Q_V$  zdefiniowana jest zależnością (23).

Można zauważyć, że zadania analizy wrażliwości pola temperatury względem współczynnika wymiany ciepła i względem warunku początkowego są z formalnego punktu widzenia bardzo podobne i nie różnią się istotnie od opisu problemu podstawowego. Tak więc analiza wrażliwości w ujęciu bezpośrednim nie wymaga konstrukcji dodatkowych skomplikowanych algorytmów numerycznych i odpowiednie programy komputerowe są powieleniem, z niewielkimi zmianami, programu bazowego.

#### 4. Przykłady obliczeń numerycznych

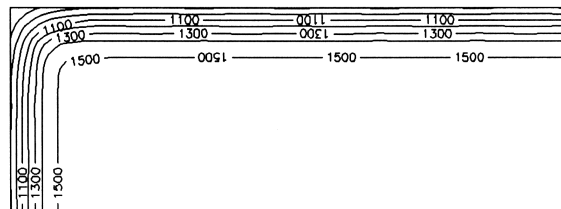
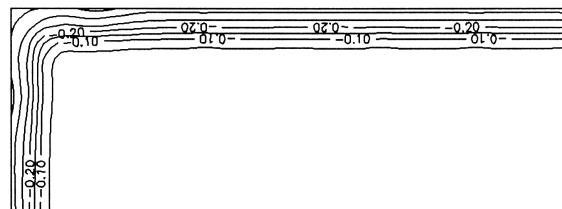
W pierwszej kolejności będziemy rozpatrywać symetryczny fragment (ćwiartkę) przekroju poprzecznego wlewka przemieszczającego się przez urządzenie COS. Obszar pokryto regularną siatką prostokątów i obliczenia przeprowadzono wykorzystując schemat jawny metody bilansów. Lokalną wydajność źródeł wewnętrznych dla kolejnych objętości wewnętrznych przybliżono funkcją, w której pochodną  $\partial T / \partial t$  zastąpiono ilorazem centralnym (z wyjątkiem pierwszego kroku), wykorzystując oczywiście rozwiązanie problemu podstawowego. Wymiary przekroju poprzecznego wlewka wyniosły  $0.6 \times 0.2$  m. Wlewek wykonany był ze stali węglowej o zawartości 0.44% C. Temperatura zalewania:  $T_p = 1550^\circ\text{C}$ , szybkość odlewania:  $u = 0.017$  m/s. Wartość parametrów termofizycznych stali przyjęto na podstawie literatury, przy czym założono stałą wartość  $\lambda = 35$  W/mK. Współczyn-

nik wymiany ciepła w strefie chłodzenia pierwotnego wynosił  $\alpha = 1500 \text{ W/m}^2\text{K}$ , temperatura wody chłodzącej  $T_w = 40^\circ\text{C}$ . Na etapie obliczeń dotyczących analizy wrażliwości względem współczynnika  $\alpha$  przyjęto jego zmianę o  $\Delta\alpha = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Na rysunku 2 pokazano pole temperatury (rozkład izoterm) w strefie końcowej krystalizatora ( $z = 0.6 \text{ m}$ ) dla współczynnika bazowego.

Rys. 2. Pole temperatury w odległości  $z = 0.6 \text{ m}$ 

W pracy [8] przeprowadzono również analizę wpływu temperatury zalewania na proces krzepnięcia wlewka ciągłego. Temperaturę podstawową ( $1550^\circ\text{C}$ ) rozszerzono na zakres  $\pm 20 \text{ K}$ . Metody obliczeniowe wykorzystane w tym zadaniu były identyczne jak w przykładzie dotyczącym zmiany współczynnika  $\alpha$ . Na rysunku 3 pokazano rozwiązanie ( $z = 0.6 \text{ m}$ ) uzyskane dla  $\alpha = 1700 \text{ [W/m}^2\text{K]}$  na podstawie analizy wrażliwości. Rozkład izolinii funkcji  $U$  dla  $z = 0.6 \text{ m}$  przedstawia rysunek 4. Możliwość przeliczenia rozwiązania bazowego na dowolne inne rozwiązanie różniące się współczynnikiem  $\alpha$  wynika z rozwinięcia funkcji temperatury w szereg potęgowy

$$T(x, y, t, \alpha + \Delta\alpha) \approx T(x, y, t, \alpha) + U(x, y, t, \alpha)\Delta\alpha \quad (30)$$

Rys. 3. Rozkład temperatury  $\alpha = 1700 \text{ W/m}^2\text{K}$ Rys. 4. Rozkład izolinii funkcji  $U$  dla  $z = 0.6 \text{ m}$



Przedstawiony wyżej przykład można uogólnić na przypadki bardziej złożone. W pracy [9] pokazano rozwiązanie dotyczące wrażliwości pola temperatury w obszarze wlewka na zmiany współczynnika  $\alpha$  przy zmiennej w czasie temperaturze zalewania, co przybliżyło opis matematyczny procesu do jego warunków rzeczywistych (temperatura strugi metalu opuszczającego kadz może zmieniać się nawet w granicach kilkudziesięciu stopni). Szczegółowe omówienie możliwości wykorzystania analizy wrażliwości w zadaniach związanych z termodynamiką procesów odlewniczych można znaleźć w [8].

Praca została wykonana w ramach Projektu Badawczego 7T08B 008 18 finansowanego przez KBN.

## Literatura

- [1] Majchrzak E., Mochnacki B., Application of the BEM in the Thermal Theory of Foundry, Engineering Analysis with Boundary Elements 1995, 16, 99-121.
- [2] Majchrzak E., Mochnacki B., The BEM application for numerical solution of non-steady and non-linear thermal diffusion problems, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences 1996, 3, 4, 327-346.
- [3] Majchrzak E., Szopa R., Simulation of Heat and Mass Transfer in Domain of Solidifying Binary Alloy, Archives of Metallurgy 1998, 43, 4, 341-351.
- [4] Mochnacki B., Application of the BEM for Numerical Modelling of Continuous Casting, Computational Mechanics, 18, Springer-Verlag 1996, 55-61.
- [5] Mochnacki B., Suchy J.S., Numerical methods in computations of foundry processes, PFTA, Cracow 1995.
- [6] Dems K., Sensitivity analysis in thermal problems-I: variation of material parameters within fixed domain, Journal of Thermal Stresses 1986, 9, 303-324.
- [7] Dems K., Rousselet B., Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body - Part I, II, Structural Optimization 1999, 17, 36-45, 46-54.
- [8] Siedlecki J., Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, Częstochowa 2002.
- [9] Szopa R., Siedlecki J., Sensitivity analysis of continuous casting with regard to time-dependent pouring temperature, Archives of Foundry, PAN - Katowice 2002, 36/4.