EFEKTYWNOŚĆ INWESTYCJI WIELOLETNICH

Marek Ładyga, Maciej Tkacz

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie. W niniejszej pracy przypomniano definicję wskaźnika jakości inwestycji oraz podano jego podstawowe własności. Wprowadzono tzw. globalny wskaźnik jakości inwestycji oraz podano jego zastosowanie w ocenie działalności inwestycyjnej jednego przedsiębiorstwa. W drugiej części pracy badano efektywność wieloletnich inwestycji przedsiębiorstw całej branży, a nawet różnych branż w oparciu o pewne metody wielowymiarowej analizy porównawczej. Jako podstawową metodę pozwalającą na porównanie przedsiębiorstw (obiektów) ze względu na wskaźniki jakości inwestycji przyjęto ich „podobieństwo", miarą którego jest odległość między obiektami.

W pracy [1] został zdefiniowany wskaźnik jakości inwestycji w postaci

$$I_{lk} = \frac{12 + m_{lk}\alpha_k}{12 + m_{lk} i_k} \tag{1}$$

gdzie:
m_{lk} - numer miesiąca, w którym analizuje się jakość inwestycji (l = 1,2,...,12) w k-tym roku jej trwania,
α_k - szacowana stopa procentowa zysku w k-tym roku trwania inwestycji,
i_k - stopa inflacji w k-tym roku.

Wskaźnik (1) pozwala na comiesięczną ocenę działalności firmy kapitałowej. Jak łatwo sprawdzić, jest on całką równania

$$\frac{\partial I_{lk}}{\partial \alpha_k} I_{lk} + \frac{\partial I_{lk}}{\partial i_k} = 0 \tag{2}$$

Elastyczności cząstkowe wskaźnika (1) mają postać

$$E_{\alpha_k} I_{lk} = \frac{m_{lk}\alpha_k}{12 + m_{lk} i_k} \tag{3}$$

$$E_{i_k} I_{lk} = -\frac{m_{lk} i_k}{12 + m_{lk} i_k} \tag{4}$$

Średnie tempo wzrostu wskaźnika jakości inwestycji

$$r = \frac{\partial I_{lk}}{I_{lk}} = E_{\alpha_k} I_{lk} \cdot r_{\alpha_k} + E_{i_k} I_{lk} \cdot r_{i_k}$$

jest średnią ważoną elastyczności cząstkowych z wagami równymi odpowiednio średnim tempom cząstkowym wzrostu stóp procentowych zysku $r_{\alpha_k} = \frac{d\alpha_k}{\alpha_k}$ i inflacji $r_{i_k} = \frac{di_k}{i_k}$.

W przypadku rocznej oceny inwestycji firmy kapitałowej w k-tym roku jej trwania wzór (1) przyjmuje postać

$$I_k = \frac{1+\alpha_k}{1+i_k} \tag{5}$$

Przy długoterminowej n-letniej inwestycji można wprowadzić tzw. globalny wskaźnik jakości inwestycji $I^{(n)} = I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_n$, gdzie $I_k(k=1,\ldots,n)$ dane jest wzorem (5). Oczywiste jest, iż n-letnia inwestycja jest dla firmy opłacalna tylko wtedy, gdy $I^{(n)} > 1$. Możemy zatem traktować wskaźnik $I^{(n)}$ jako narzędzie oceny jakości inwestycji danej firmy. Jak łatwo zauważyć globalny wskaźnik $I^{(n)}$ jest całką równania różniczkowego

$$\frac{\partial^n I^{(n)}}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n} I^{(n)} + (-1)^{n+1}\frac{\partial^n I^{(n)}}{\partial i_1\ldots\partial i_n} = 0$$

Elastyczności cząstkowe mają postać:

$$E_{\alpha_k} I^{(n)} = \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k}$$

$$E_{i_k} I^{(n)} = -\frac{i_k}{1+i_k} \qquad k=1,\ldots,n$$

natomiast średnie tempo wzrostu wskaźnika $I^{(n)}$ względem stóp α_k, i_k, $k = 1,\ldots,n$ wyraża się wzorem

$$r = \frac{dI^{(n)}}{I^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n}\left(E_{\alpha_k} I^{(n)} \cdot r_{\alpha_k} + E_{i_k} I^{(n)} \cdot r_{i_k}\right)$$

gdzie: $r_{\alpha_k} = \frac{d\alpha_k}{\alpha_k}$, $\qquad r_{i_k} = \frac{di_k}{i_k}$.

Powróćmy do analizy wskaźnika I_k danego wzorem (5). Wskaźnik ten jest wyliczony dla jednej firmy. Możemy jednak w oparciu o pewne metody wielowymiarowej analizy porównawczej badać efektywność inwestycji przedsiębiorstw całej branży, a nawet różnych branż. Podstawowymi niedefiniowalnymi pojęciami analizy porównawczej są pojęcia obiektu i zmiennej. W naszym przypadku obiekt to przedsiębiorstwo, zaś zmienne to wskaźniki jakości inwestycji. Załóżmy, że badamy m przedsiębiorstw rozpoczynających n-letnie inwestycje. Określmy analogicznie do (5) roczny wskaźnik jakości inwestycji dla r-tego przedsiębiorstwa ($r = 1,...,m$) w k-tym roku

$$I_{rk} = \frac{1+\alpha_{rk}}{1+i_k} \qquad k = 1,\ldots,n$$

gdzie:
α_{rk} - stopa zysku r-tego przedsiębiorstwa w k-tym roku,
i_k - inflacja w k-tym roku.

Powyższe wskaźniki (zmienne) możemy zapisać w postaci tzw. macierzy obserwacji I

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \ldots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \ldots & I_{2n} \\ \vdots & & & \\ I_{m1} & I_{m2} & \ldots & I_{mn} \end{bmatrix}$$

W przypadku analizy przedsiębiorstw różnych branż celowe jest sprowadzenie wszystkich zmiennych do wielkości tego samego rzędu. Można tego dokonać normując macierz obserwacji. Jest wiele sposobów normowania, jednak najczęściej stosowanym jest standaryzacja. Polega ona na zastąpieniu zmiennej I_{rk} zmienną

$$Z_{rk} = \frac{I_{rk} - \bar{I}_k}{S_k}$$

gdzie: $\bar{I}_k = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} I_{rk}$

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\left(I_{rk} - \bar{I}_k\right)^2}$$

Najprostszą metodą normowania macierzy I jest zastąpienie zmiennej I_{rk} zmienną

$$Z_{rk} = \frac{I_{rk} - \min_r I_{rk}}{t_k}$$

gdzie $$t_k = \max_r I_{rk} - \min_r I_{rk}$$

Wielkość ta nosi nazwę rozproszenia lub rozstępu k-tej zmiennej. Wielkości S_k, t_k mogą w pewnych przypadkach służyć jako ilustracja jakości inwestycji porównywanych przedsiębiorstw. Np. duże zróżnicowanie t_k oznacza również duże zróżnicowanie dochodów firm. Parametry te nie dają jednak kryteriów wyboru firm ze względu na jakość inwestycji. Pojęciem pozwalającym na porównanie obiektów pod względem badanego zjawiska jest ich „podobieństwo”, miarą którego jest odległość między nimi. Do określenia odległości między i-tym i j-tym obiektem stosuje się najczęściej odległość euklidesową, tzn.:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(Z_{ik} - Z_{jk}\right)^2} \quad \text{dla firm różnych branż (unormowana macierz } I\text{)}$$

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(I_{ik} - I_{jk}\right)^2} \quad \text{dla firm tej samej branży (nieunormowana macierz } I\text{)}$$

Obliczając odległości dla wszystkich obiektów, otrzymujemy macierz odległości

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & 0 & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Oczywiście $D = D^T$.

Na podstawie macierzy odległości można pogrupować obiekty w klasy z uwzględnieniem poniższych warunków:

1) suma wszystkich klas musi dać cały zbiór obiektów,
2) klasy muszą być rozłączne,
3) klasy muszą zawierać obiekty jak najbardziej podobne do siebie.

Dla m obiektów (przedsiębiorstw) metoda grupowania przebiega w m–1 etapach. Na początku każdy obiekt tworzy klasę jednoelementową, tzn.

$$C_i^0 = \{0_i\} \qquad i = 1,2,...,m$$

Ogólnie C_i^r oznaczać będzie i-tą klasę obiektów w r-tym etapie grupowania. W etapie tym wykonuje się następujące czynności:

1. Na podstawie macierzy odległości między klasami D^{r-1} o wymiarach $(n-r+1)x(n-r+1)$, gdzie $D^o = D$ wybiera się dwie klasy najbliższe, tzn. klasy C_p^{r-1} i C_q^{r-1}, dla których zachodzi $d_{pq}^{r-1} = \min\limits_{i,j} d_{ij}^{r-1}, i \neq j,$ gdzie d_{ij}^{r-1} oznacza element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy D^{r-1}.
2. Łączy się klasy C_p^{r-1} i C_q^{r-1}, tworząc nową klasę C_p^r. Pozostałe klasy nie ulegają zmianie.
3. Tworzy się nową macierz odległości między klasami D^γ o wymiarach $(n-r)$ x $(n-r)$ powstałą z macierzy D^{r-1} przez zastąpienie dwóch wierszy i kolumn odpowiadających łączonym na tym etapie klasom C_p^{r-1} i C_q^{r-1} jednym wierszem i jedną kolumną, zawierającymi odległość nowo powstałej klasy C_p^r od pozostałych klas.

Wyróżnia się kilka sposobów określania odległości nowo powstałej klasy od pozostałych klas. W tej pracy przyjmujemy odległości „najbliższego sąsiada" (n. s.), w oparciu o nią omówimy metodę grupowania w klasy, nazwaną również metodą „najbliższego sąsiada". Niech będą dane dwie klasy obiektów C_1 i C_2. Odległości „n. s." między tymi klasami wyraża się wzorem

$$d(C_1, C_2) = \min d_{ij} \tag{6}$$

$0_i \in C_1$

$0_j \in C_2$

Przykład 1. Dana jest macierz odległości dla pięciu obiektów

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 1{,}5 & 1{,}2 & 3 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 & 1 & 2 \\ 1{,}5 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 2{,}1 \\ 1{,}2 & 1 & 0{,}4 & 0 & 0{,}7 \\ 3 & 2 & 2{,}1 & 0{,}7 & 0 \end{bmatrix}$$

Niech obiekty 1, 2, 3 należą do klasy C_1, obiekty 4, 5 do C_2, wówczas

$$d(C_1, C_2) = \min\{d_{14}, d_{15}, d_{24}, d_{25}, d_{34}, d_{35}\} = \{1{,}2; 3; 1; 2; 0{,}4; 2{,}1\} = 0{,}4$$

Przykład 2. Niech będzie dana macierz z przykładu 1. Minimalny element tej macierzy to $d_{12}^0 = 0{,}2$. Wobec tego klasy C_1^0 i C_2^0 tworzą nową klasę C_1^1, natomiast pozostałe klasy pozostają bez zmian, tzn. $C_2^1 = C_3^0 = \{0_3\}$, $C_3^1 = C_1^0 = \{0_4\}$, $C_1^1 = C_5^0 = \{0_5\}$. Po pierwszym etapie otrzymujemy klasyfikację $\{0_1, 0_2\}$, $\{0_3\}$, $\{0_4\}$, $\{0_5\}$. Określamy teraz odległość klasy C^1 od pozostałych klas, korzystając ze wzoru (6):

$$d_{12}^1 = d(C_1^1, C_2^1) = \min\{d_{13}, d_{23}\} = \min\{1{,}5,\ 0{,}6\} = 0{,}6$$

$$d_{13}^1 = d(C_1^1, C_3^1) = \min\{d_{14}, d_{24}\} = \min\{1{,}2,\ 1\} = 1$$

$$d_{14}^1 = d(C_1^1, C_4^1) = \min\{d_{15}, d_{25}\} = \min\{3,\ 2\} = 2$$

Zatem macierz D^1 ma postać

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}6 & 1 & 2 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 2{,}1 \\ 1 & 0{,}4 & 0 & 0{,}7 \\ 2 & 2{,}1 & 0{,}7 & 0 \end{bmatrix}$$

Minimalnym elementem macierzy D^1 jest $d_{23}^1 = 0,4$. Po drugim etapie mamy zatem klasyfikację $\{0_1, 0_2\}$, $\{0_3, 0_4\}$, $\{0_5\}$ i

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 & 2 \\ 0,6 & 0 & 2,1 \\ 2 & 2,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Minimalnym elementem macierzy D^2 jest $d_{12}^2 = 0,6$. Po trzecim etapie otrzymujemy klasyfikację $\{0_1, 0_2, 0_3, 0_4\}$, $\{0_5\}$ i

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2,1 \\ 2,1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeżeli klasy C_1 i C_2 występujące w przykładzie 1 potraktujemy jako branże, a obiekty 0_i, $i = 1,...,5$ jako przedsiębiorstwa do nich należące, to okazuje się, iż przedsiębiorstwa tej samej branży należą do różnych klas (0_4 i 0_5).
W wyniku tak przeprowadzonej klasyfikacji obiektów przynależność przedsiębiorstw tej samej branży do dwóch różnych klas jest niepokojącym sygnałem o zbyt dużym zróżnicowaniu dochodowości. Przedsiębiorstwa tej samej branży powinny być jak najbardziej podobne, czyli powinny tworzyć jedną klasę. Przynależność do różnych klas powoduje w praktyce niemożność porównania jakości inwestycji w różnych branżach. W takim przypadku pozostaje porównywanie znormalizowanych współczynników jakości inwestycji w k-tym roku. Można tego dokonać, badając iloczyny

$$Z_k = Z_{1k} \cdot Z_{2k} \cdot \ldots \cdot Z_{ik}$$

gdzie Z_{ik} jest znormalizowanym wskaźnikiem jakości inwestycji i-tego przedsiębiorstwa w k-tym roku pewnej branży. Jest oczywiste, że im bardziej Z_k jest większe od jedności, tym inwestycje w rozpatrywanej branży są bardziej opłacalne.

Literatura

[1] Kałużny T., Ładyga M., Podgórski P., Tkacz M., Wskaźnik jakości inwestycji, III Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna Produkcja i Zarządzanie w Hutnictwie, Ustroń-Jaszowiec 1999.

[2] Ładyga M., Tkacz M., Wskaźnik jakości inwestycji jako narzędzie w ocenie firm kapitałowych, Efektywność zastosowania systemów informatycznych, pod red. J.K. Grabary, J.S. Nowaka, WNT, Warszawa-Szczyrk 2001.

[3] Ładyga M., Tkacz M., Zastosowanie wskaźnika jakości inwestycji do klasyfikacji obiektów, Efektywność zastosowań systemów informacyjnych 2002, pod redakcją J.K. Grabary, J.S. Nowaka, WNT, Warszawa 2002.

[4] Ładyga M., Tkacz M., Wskaźnik jakości inwestycji w analizie porównawczej, Sympozjum Naukowe Instytutu Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej, Poraj 2000.