

## ZASTOSOWANIE METODY FUNKCJI GREENA W ANALIZIE DRGAŃ BELEK O ZMIENNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM Z ELEMENTAMI DYSKRETNymi

*Stanisław Kukła, Izabela Zamojska*

*Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska*

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia drgań własnych belki, której pole przekroju poprzecznego jest funkcją przedziałami stałą. Rozważania dotyczą drgań belek z dodatkowym elementem dyskretnym, który reprezentuje masę skupioną lub podporę sprężystą. Dokładne rozwiązanie zagadnienia otrzymano, wykorzystując własności funkcji Greena. Przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń numerycznych, obrazujące wpływ wybranych parametrów na drgania belki składającej się z dwóch segmentów.

### Wstęp

Analiza drgań belek ma szczególne znaczenie ze względu na liczne zastosowania elementów belkowych w złożonych układach mechanicznych. Na przykład w konstrukcjach mostów, wysięgników, maszyn roboczych można wyróżnić elementy, których częstości i postacie drgań mogą być wyznaczone w ramach teorii drgań belek. Z tego względu badania eksperymentalne i teoretyczne drgań belek są przedmiotem zainteresowania wielu autorów [1-11].

Liczne prace poświęcone analizie drgań belek dotyczą belek o stałym przekroju (np. prace [1-7]). W pracach tych przedstawiono wyniki badań teoretycznych i numerycznych drgań belek z podporą sprężystą lub zamocowaną masą skupioną. Autorzy tych prac znajdują rozwiązania dokładne zagadnień drgań badanych układów [2-7] lub stosują metody przybliżone [1, 8]. Przedmiotem badań prezentowanych w pracach [1-5] są drgania belek ze sprężystie zamocowaną masą.

Wśród zagadnień drgań belek o zmiennym przekroju można wyróżnić zagadnienia dotyczące belek stopniowanych (belek składających się z segmentów o stałym przekroju). Badania drgań tego typu belek prezentowano w pracach [8-11]. Prace [8-10] dotyczą belek składających się z dwóch segmentów.

Przedmiotem niniejszej pracy jest zagadnienie drgań własnych belek stopniowanych składających się z dowolnej, skończonej liczby segmentów. Sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia dotyczy drgań belek z dodatkową masą skupioną lub podporą sprężystą. Równanie częstości drgań własnych otrzymano, stosując metodę funkcji Greena.

## 1. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy drgania poprzeczne belki stopniowanej (rys. 1), złożonej z  $n$  segmentów o długościach  $l_i$  oraz przekrojach poprzecznych  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Zgodnie z teorią drgań belek Bernoulliego-Eulera, ruch poszczególnych segmentów belki opisują równania:

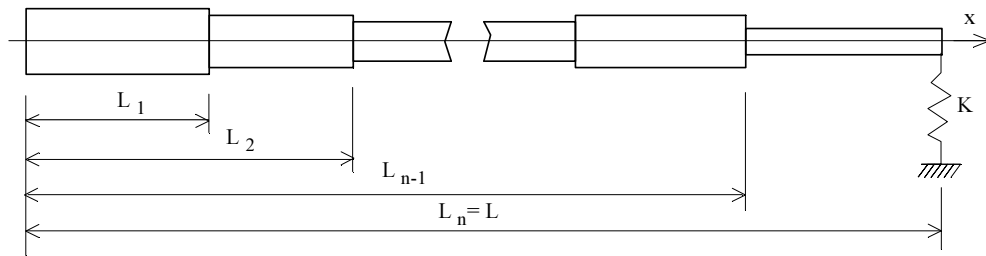
$$\mathbf{L}_1[v_1(x, t)] = s_1(t)\delta(x - L_1) - m_1(t)\delta'(x - L_1) \quad x \in [0, L_1] \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i[v_i(x, t)] = & -s_{i-1}(t)\delta(x - L_{i-1}) + s_i(t)\delta(x - L_i) + \\ & + m_{i-1}(t)\delta'(x - L_{i-1}) - m_i(t)\delta'(x - L_i), \quad x \in [L_{i-1}, L_i], \quad i = 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{L}_n[v_n(x, t)] = -s_{n-1}(t)\delta(x - L_{n-1}) + m_{n-1}(t)\delta'(x - L_{n-1}) + p(x, t) \quad x \in [L_{n-1}, L] \quad (3)$$

gdzie  $(EI)_i$  jest sztywnością zginania,  $\rho_i$  jest masą przypadającą na jednostkę długości  $i$ -tego segmentu belki,  $\delta(\cdot)$  oznacza dystrybucję Diraca oraz

$$\mathbf{L}_i = (EI)_i \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho_i \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$



Rys. 1. Schemat rozważanego układu

W punktach  $x = L_0 = 0$  i  $x = L_n = L$  funkcje  $v_1, v_n$  spełniają warunki brzegowe zależne od sposobu zamocowania końców belki

$$\mathbf{B}_1[v_1] \Big|_{x=0} = 0, \quad \mathbf{B}_n[v_n] \Big|_{x=L} = 0 \quad (5)$$

Ponadto w punktach  $L_i$  spełnione są następujące warunki ciągłości:

$$v_i(L_i, t) = v_{i+1}(L_i, t), \quad v_{i,x}(L_i, t) = v_{i+1,x}(L_i, t) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (6)$$

Zakładając, że ruch belki jest harmoniczny, tzn. przyjmując w równaniach (1)-(3):

$$v_i(x, t) = \bar{V}_i(x)e^{j\omega t}, p(x, t) = \bar{P}(x)e^{j\omega t}, s_i(t) = \bar{S}_i e^{j\omega t}, m_i(t) = \bar{M}_i e^{j\omega t} \quad (7)$$

otrzymujemy:

$$\tilde{\mathbf{L}}[V_1] = S_1 \delta(x - l_1) - M_1 \delta'(x - l_1) \quad x \in [0, l_1] \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}[V_i] = -\mu_{i-1} S_{i-1} \delta(x - l_{i-1}) + S_i \delta(x - l_i) + \mu_{i-1} M_{i-1} \delta'(x - l_{i-1}) - M_i \delta'(x - l_i) \\ x \in [0, l_i], i = 2, \dots, n-1 \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}[V_n] = -\mu_{n-1} S_{n-1} \delta(x - l_{n-1}) + \mu_{n-1} M_{n-1} \delta'(x - l_{n-1}) + P(x) \quad x \in [0, l_n] \quad (10)$$

gdzie:

$$j = \sqrt{-1}, \Omega_i^4 = \rho_i \omega^2 / (EI)_i, V_i = \bar{V}_i / (EI)_i, P = \bar{P} / (EI)_n, S_i = \bar{S}_i / (EI)_i, \\ \mu_{i-1} = (EI)_{i-1} / (EI)_i, l_i = L_i - l_{i-1}, \tilde{\mathbf{L}}[V_i] = \frac{d^4}{dx^4} - \Omega_i^4 \text{ dla } x \in [l_{i-1}, l_i], i = 1, \dots, n.$$

W niniejszej pracy zakłada się, że funkcja  $P$  reprezentuje sprężyste podparcie lub masę skupioną umieszczoną na końcu belki. Dlatego przyjmuje się następującą postać tej funkcji:

$$P(x) = B_0 V_n(x) \delta(x - l_n) \quad (11)$$

gdzie  $B_0 = -M_c \Omega^4$ , gdy w punkcie  $x = l_n$  występuje masa skupiona  $M_c$  lub  $B_0 = K$ , gdy na końcu belki występuje podpora sprężysta, którą charakteryzuje stała  $K$ .

Funkcje  $V_1, V_n$  spełniają warunki, które otrzymuje się, wykorzystując (7) w równaniach (5):

$$\bar{\mathbf{B}}_1[V_1] \Big|_{x=0} = 0, \quad \bar{\mathbf{B}}_n[V_n] \Big|_{x=l_n} = 0 \quad (12)$$

Natomiast warunki ciągłości (6) przyjmują postać

$$V_i(l_i) = V_{i+1}(0), \quad V_{i,x}(l_i) = V_{i+1,x}(0) \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

## 2. Funkcje Greena

Rozwiązanie zagadnienia (8)-(13) można wyznaczyć, wykorzystując własności funkcji Greena. Funkcja Greena  $G_i$  spełnia równanie różniczkowe

$$G_{i,xxxx}(x, \lambda; \Omega_i) - \Omega_i^4 G_i(x, \lambda; \Omega_i) = \delta(x - \lambda) \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

oraz odpowiednie warunki brzegowe:

- funkcja  $G_1$  spełnia warunki

$$\overline{B}_1[G_1] \Big|_{x=0} = 0, \quad G_{1,xx} \Big|_{x=l_1} = G_{1,xxx} \Big|_{x=l_1} = 0 \quad (15)$$

- funkcje  $G_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ ) spełniają warunki

$$G_{i,xx} \Big|_{x=0} = G_{i,xxx} \Big|_{x=0} = 0, \quad G_{i,xx} \Big|_{x=l_i} = G_{i,xxx} \Big|_{x=l_i} = 0 \quad (16)$$

- funkcja  $G_n$  spełnia warunki

$$G_{n,xx} \Big|_{x=0} = G_{n,xxx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \overline{B}_n[G_n] \Big|_{x=l_n} = 0 \quad (17)$$

Funkcje  $G_i$  można przedstawić w postaci sumy [5]

$$G_i(x, \lambda; \Omega_i) = G_i^0(x, \lambda; \Omega_i) + \overline{G}_i^1(x, \lambda; \Omega_i)H(x - \lambda), \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

gdzie  $H$  jest funkcją Heaviside'a,  $G_i^0$  jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego

$$G_{i,xxxx}(x, \lambda; \Omega_i) - \Omega_i^4 G_i(x, \lambda; \Omega_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (19)$$

Drugi składnik prawej strony równania (18) jest rozwiązaniem szczególnym równania (14). Można wykazać, że  $\overline{G}_i^1$  ma postać

$$\overline{G}_i^1(x, \lambda; \Omega_i) = G_i^1(x - \lambda; \Omega_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (20)$$

przy czym funkcja  $G_i^1$  jest rozwiązaniem szczególnym równania jednorodnego (19), spełniającym warunki

$$G_i^1 \Big|_{x=\lambda} = G_{i,x}^1 \Big|_{x=\lambda} = G_{i,xx}^1 \Big|_{x=\lambda} = 0, \quad G_{i,xxx}^1 \Big|_{x=\lambda} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (21)$$

Wobec tego

$$G_i(x, \lambda; \Omega_i) = c_{i1} \cos \Omega_i x + c_{i2} \sin \Omega_i x + c_{i3} \cosh \Omega_i x + c_{i4} \sinh \Omega_i x + \frac{1}{2\Omega_i^3} [-\sin \Omega_i(x - \lambda) + \sinh \Omega_i(x - \lambda)] \cdot H(x - \lambda) \quad (22)$$

gdzie współczynniki  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, 4$  wyznaczone są z warunków brzegowych (15a) i (17b).

### 3. Rozwiązanie zagadnienia

Dalej rozważa się przypadek belki wspornikowej. W tym przypadku warunki brzegowe (15a) i (17b) przyjmują postać:

$$V_l(0) = V_{l,xx}(0) = 0, \quad V_{n,xx}(l_n) = V_{n,xxx}(l_n) = 0 \quad (23)$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (8)-(10), spełniające przyjęte warunki brzegowe można zapisać następująco [11]:

$$V_1(x) = S_1 G_1(x, l_1; \Omega_1) + M_1 G_{1,\lambda}(x, l_1; \Omega_1) \quad (24)$$

$$V_i(x) = -\mu_{i-1} S_{i-1} G_i(x, 0; \Omega_i) - \mu_{i-1} M_{i-1} G_{i,\lambda}(x, 0; \Omega_i) + \\ + S_i G_i(x, l_i; \Omega_i) + M_i G_{i,\lambda}(x, l_i; \Omega_i) \quad \text{dla } i = 2, \dots, n-1 \quad (25)$$

$$V_n(x) = -\mu_{n-1} S_{n-1} G_n(x, 0; \Omega_n) - \mu_{n-1} M_{n-1} G_{n,\lambda}(x, 0; \Omega_n) + \\ + B_0 V_n(l_n) G_n(x, l_n; \Omega_n) \quad (26)$$

Wstawiając funkcje  $V_i$  (równania (24)-(26)) do warunków (13), otrzymuje się układ równań z niewiadomymi  $S_1, M_1, S_2, M_2, \dots, S_{n-1}, M_{n-1}$ :

$$S_1[G_1(l_1, l_1) + \mu_1 G_2(0, 0)] + M_1[G_{1,\lambda}(l_1, l_1) + \mu_1 G_{2,\lambda}(0, 0)] + \\ - S_2 G_2(0, l_2) - M_2 G_{2,\lambda}(0, l_2) = 0 \quad (27)$$

$$S_1[G_{1,x}(l_1, l_1) + \mu_1 G_{2,x}(0, 0)] + M_1[G_{1,\lambda x}(l_1, l_1) + \mu_1 G_{2,\lambda x}(0, 0)] + \\ - \mu_2 S_2 G_{2,x}(0, l_2) - \mu_2 M_2 G_{2,\lambda x}(0, l_2) = 0 \quad (28)$$

$$- \mu_{i-1} S_{i-1} G_i(l_i, 0) - \mu_{i-1} M_{i-1} G_{i,\lambda}(l_i, 0) + S_i[G_i(l_i, l_i) + \mu_i G_{i+1}(0, 0)] + \\ + M_i[G_{i,\lambda}(l_i, l_i) + \mu_i G_{i+1,\lambda}(0, 0)] - S_{i+1} G_{i+1}(0, l_{i+1}) - M_{i+1} G_{i+1,\lambda}(0, l_{i+1}) = 0 \quad (29)$$

$$- \mu_{i-1} S_{i-1} G_{i,x}(l_i, 0) - \mu_{i-1} M_{i-1} G_{i,\lambda x}(l_i, 0) + S_i[G_{i,x}(l_i, l_i) + \mu_i G_{i+1,x}(0, 0)] + \\ + M_i[G_{i,\lambda x}(l_i, l_i) + \mu_i G_{i+1,\lambda x}(0, 0)] - S_{i+1} G_{i+1,x}(0, l_{i+1}) - M_{i+1} G_{i+1,\lambda x}(0, l_{i+1}) = 0 \\ i = 2, \dots, n-2 \quad (30)$$

$$- \mu_{n-2} S_{n-2} G_{n-1}(l_{n-1}, 0) - \mu_{n-2} M_{n-2} G_{n-1,\lambda}(l_{n-1}, 0) + \\ + \mu_{n-1} S_{n-1} G_n(0, 0) + \mu_{n-1} M_{n-1} G_{n,\lambda}(0, 0) - B_0 V_n(l_n) G_n(0, l_n) = 0 \quad (31)$$

$$- \mu_{n-2} S_{n-2} G_{n-1,x}(l_{n-1}, 0) - \mu_{n-2} M_{n-2} G_{n-1,\lambda x}(l_{n-1}, 0) + \\ + \mu_{n-1} S_{n-1} G_{n,x}(0, 0) + \mu_{n-1} M_{n-1} G_{n,\lambda x}(0, 0) - B_0 V_n(l_n) G_{n,x}(0, l_n) = 0 \quad (32)$$

Ponadto dodatkowe równanie otrzymuje się, przyjmując  $x = l_n$  w równaniu (26)

$$[1 - B_0 G_n(l_n, l_n)] V_n(l_n) + \mu_{n-1} S_{n-1} G_n(l_n, 0) + \mu_{n-1} M_{n-1} G_{n,\lambda}(l_n, 0) = 0 \quad (33)$$

Równania (27)-(33) mogą być zapisane następująco:

$$A(\omega) \mathbf{X} = 0 \quad (34)$$

gdzie  $A$  jest macierzą  $(2n-1) \times (2n-1)$  wymiarową oraz

$$\mathbf{X} = [S_1 \quad M_1 \quad \dots \quad S_{n-1} \quad M_{n-1} \quad V_n(l_n)]^T \quad (35)$$

Układ ten posiada nietrywialne rozwiązania, gdy spełniony jest warunek

$$\det A(\omega) = 0 \quad (36)$$

Równanie (36) jest poszukiwanym równaniem częstości drgań własnych rozwiązanej belki stopniowanej. Równanie to jest następnie rozwiązywane numerycznie względem częstości drgań własnych układu.

#### 4. Zagadnienie drgań belki złożonej z dwóch segmentów

Równanie częstości drgań własnych (36) dla belki składającej się z dwóch segmentów ma postać:

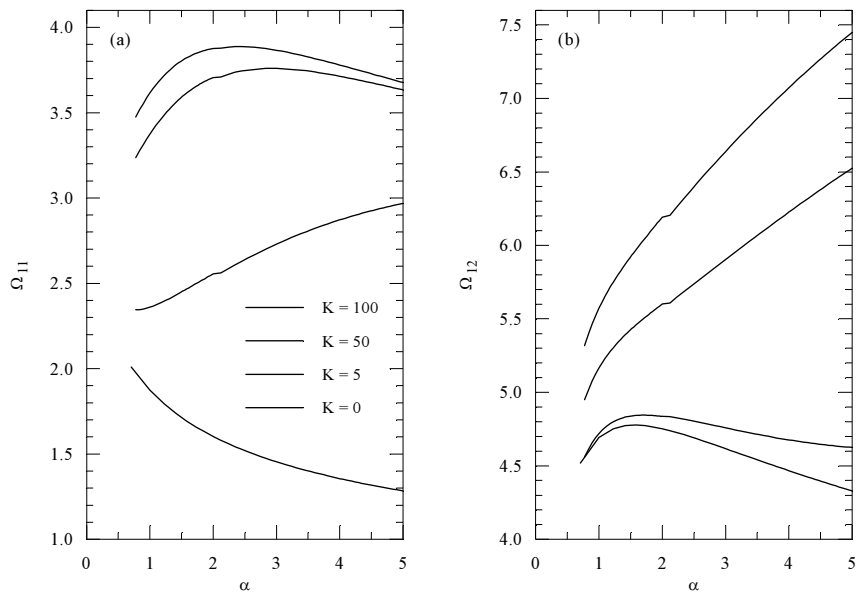
$$\begin{vmatrix} G_1(l_1, l_1) + \mu_1 G_2(0, 0) & G_{1,\lambda}(l_1, l_1) + \mu_1 G_{2,\lambda}(0, 0) & -B_0 G_2(0, l_2) \\ G_{1,x}(l_1, 0) + \mu_1 G_{2,x}(0, 0) & G_{1,\lambda x}(l_1, 0) + \mu_1 G_{2,\lambda x}(0, 0) & -B_0 G_{2,x}(0, l_2) \\ \mu_1 G_2(l_2, 0) & \mu_1 G_{2,\lambda}(0, 0) & 1 - B_0 G_2(l_2, l_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

Wykorzystując równanie częstości drgań belki dwusegmentowej, przeprowadzono badania numeryczne, których celem było określenie wpływu zmian parametrów charakteryzujących układ na jego drgania. Obliczenia wykonano dla belki wspornikowej, składającej się z dwóch segmentów o długościach  $l_1 = l_2 = 0,5$ . Założono, że na swobodnym końcu belki występuje masa skupiona lub podpora sprężysta lub nie występuje żaden z tych elementów.

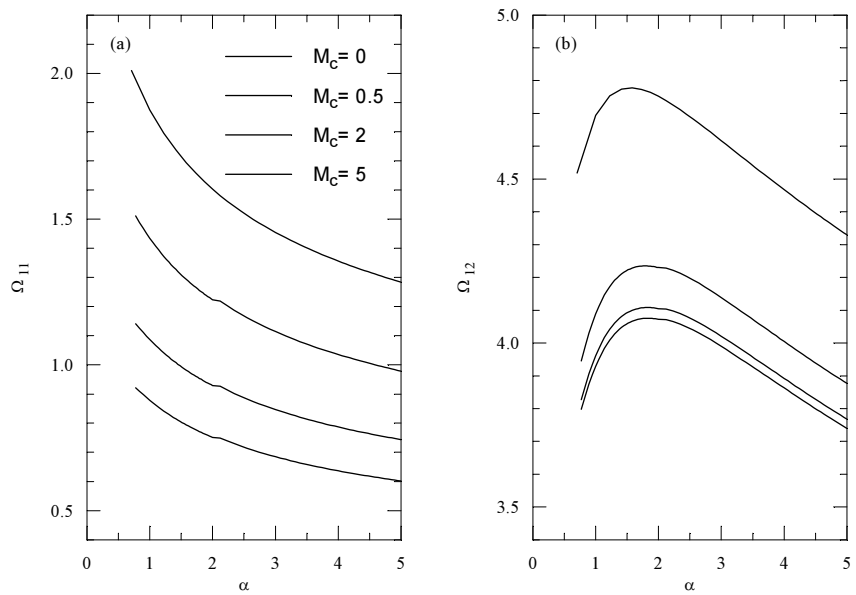
Na rysunku 2 przedstawiono zależności bezwymiarowych częstości drgań własnych  $\Omega_{11}$  i  $\Omega_{12}$  od stosunku sztywności segmentów  $\alpha = (EI)_1 / (EI)_2$  dla belki podpartej sprężysto w punkcie  $x = l_2$ . Do obliczeń przyjęto różne wartości bezwymiarowego współczynnika, charakteryzującego sprężystość podpory:  $K = 0$ ,  $K = 5$ ,  $K = 50$ ,  $K = 100$ . Wzrost współczynnika  $K$  powoduje podwyższenie częstości drgań niezależnie od wartości stosunku sztywności  $\alpha$ .

Zależności bezwymiarowych częstości  $\Omega_{11}$  i  $\Omega_{12}$  od stosunku sztywności segmentów dla belki, wspornikowej z masą skupioną, umieszczoną na swobodnym końcu belki, przedstawiono na rysunku 3. Obliczenia wykonano przyjmując:  $M = 0$ ,  $M = 0,5$ ,  $M = 2$ ,  $M = 5$ . Pierwsza częstość drgań maleje wraz ze wzrostem stosunku sztywności segmentów belki niezależnie od wielkości masy skupionej,

natomiast druga częstota jako funkcja parametru  $\alpha$  osiąga maksimum dla pewnej wartości tego parametru.



Rys. 2. Dwie pierwsze częstoty drgań własnych belki wspornikowej z podporą sprężystą jako funkcje stosunku sztywności segmentów belki



Rys. 3. Dwie pierwsze częstoty drgań własnych belki wspornikowej z dodatkową masą skupioną jako funkcje stosunku sztywności segmentów belki

## Literatura

- [1] Ercoli L., Laura P.A.A., Analytical and experimental investigation on continuous beams carrying elastically mounted masses, *Journal of Sound and Vibration* 1987, 114(3), 519-533.
- [2] Gürgöze M., On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring-mass system, *Journal of Sound and Vibration* 1996, 190(2), 149-162.
- [3] Jacquot R.G., Gibson J.D., The effects of discrete masses and elastic supports on continuous beam natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration* 1972, 23(2), 237-244.
- [4] Kukla S., Posiadała B., Free vibrations of beams with elastically mounted masses, *Journal of Sound and Vibration* 1994, 175(4), 557-564.
- [5] Kukla S., Dynamiczne funkcje Greena w analizie drgań własnych ciągłych i dyskretno-ciągłych układów mechanicznych, *Monografie 64*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1999.
- [6] Kukla S., The Green function method in frequency analysis of a beam with intermediate elastic supports, *Journal of Sound and Vibration* 1991, 149(1), 154-159.
- [7] Low K.H., A comparative study of the eigenvalue solutions for mass-loaded beams under classical boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences* 2001, 43, 237-244.
- [8] Bellés P.M., Maurizi M.J., di Luca D.H., Vibration of stepped beams on non-uniform elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration* 1994, 196(1), 127-128.
- [9] Jang S.K., Bert C.W., Free vibration of stepped beams: exact and numerical solutions, *Journal of Sound and Vibration* 1989, 130(2), 342-346.
- [10] Ji Wang, Vibration of stepped beams on elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration* 1991, 149(2), 315-322.
- [11] Lee J., Bergman L.A., The vibration of stepped beams and rectangular plates by an elemental dynamic flexibility method, *Journal of Sound and Vibration* 1994, 171(5), 617-640.