Please cite this article as:
Jerzy Grochulski, Styczność zbiorów a przekształcenia afiniczne, Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science, 2002, Volume 1, Issue 1, pages 47-51.
The website: http://www.amcm.pcz.pl/

STYCZNOŚĆ ZBIORÓW A PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE

Jerzy Grochulski

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

Streszczenie: W pracy wykazano, że zbiór odwzorowań różnowartościowych spełniających warunek: istnieją liczby rzeczywiste $m > 0$ i $M > 0$ takie, że dla dowolnych niepustych zbiorów A, B spełniona jest nierówność $ml(A,B) \leq l(f(A), f(B)) \leq Ml(A,B)$, stanowi grupę algebraiczną ze względu na składanie przekształceń, zawierającą grupę podobieństw. Wykazano również, że gdy E jest przestrzenią liniowo metryczną, to odwzorowania afiniczne stanowią podgrupę tej grupy. Dowiedziono, że styczność zbiorów jest niezmiennikiem tak zdefiniowanej grupy przekształceń.

Niech (E, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Niech $K(p,r)$ odpowiednio $S(p,r)$ oznacza odpowiednio kulę sferę o środku w punkcie $p \in E$ i promieniu r. Przez t - otoczenie niepustego zbioru $A \subset E$ - rozumiemy

$$A_t = \bigcup_{p \in A} K(p,t) \qquad \text{dla} \qquad t > 0 \tag{1.1}$$

$$A_t = A \qquad \text{dla} \qquad t = 0 \tag{1.2}$$

Niech E_0 oznacza rodzinę niepustych podzbiorów zbioru E i niech l będzie nieujemną funkcją rzeczywistą określoną na iloczynie kartezjańskim $E_0 \, x \, E_0$, spełniającą warunek

$$l(\{x\}, \{y\}) = \rho(x, y) \qquad \text{dla} \qquad x, y \in E \tag{2}$$

Niech a i b będą nieujemnymi funkcjami rzeczywistymi określonymi w prawostronnym otoczeniu zera takimi, że

$$a(r) \to 0 \quad \text{i} \quad b(r) \to 0 \qquad \text{dla} \quad r \to 0^+$$

Niech $A, B \in E_0$, para (A,B) jest (a,b)-skupiona w punkcie $p \in E$, jeśli zero jest punktem skupienia wszystkich liczb rzeczywistych $r > 0$ takich, że zbiory

$$A \cap S(p,r)_{a(r)} \qquad \text{i} \qquad B \cap S(p,r)_{b(r)}$$

są niepuste.

Zbiór A uważamy za (a,b)-styczny do zbioru B rzędu $k(k > 0)$ w punkcie $p \in E$, jeśli para (A,B) jest (a,b)- skupiona w punkcie p, i

$$\frac{1}{r^k} l\left(A \cap S(p,r)_{a(r)}, B \cap S(p,r)_{b(r)}\right) \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

co zapisujemy

$$(A,B) \in T_l(a,b,kp) \tag{3}$$

Niech $f : E \to E$ będzie odwzorowaniem różnowartościowym, spełniającym warunek

$$m\, l(A,B) \leq l(f(A), f(B)) \leq M\, l(A,B) \tag{4}$$

Istnieją liczby m, M takie, że dla dowolnych $A, B \in E_0$.

Stwierdzenie 1. Jeśli $m = M$, to f jest podobieństwem w przestrzeni (E, ρ).
Dowód. Załóżmy, że $m = M$, wówczas

$$l(f(A), f(B)) = m\, l(A,B)$$

Kładąc $A = \{x\}, B = \{y\}$ z (2) otrzymujemy

$$\rho(f(x), f(y)) = m\, \rho(x,y)$$

To kończy dowód.

Stwierdzenie 2. Zbiór odwzorowań f spełniających warunek (4) jest grupą algebraiczną ze względu na składanie odkształceń.
Dowód. Załóżmy, że istnieją liczby m_1, m_2, M_1, M_2 takie, że dla dowolnych $A, B \in E_0$:

$$m_1 l(A,B) \leq l(f_1(A), f_1(B)) \leq M_1 l(A,B)$$

$$m_2 l(A,B) \leq l(f_2(A), f_2(B)) \leq M_2 l(A,B)$$

Stąd

$$m_1 m_2 l(A,B) \leq m_1 l(f_2(A), f_2(B)) \leq l(f_1 f_2(A), f_1 f_2(B)) \leq$$

$$\leq M_1 l(f_2(A), f_2(B)) \leq M_1 M_2 l(A,B)$$

Wynika stąd, że jeśli f_1 i f_2 spełniają warunek (4), to złożenia $f_1 f_2$ spełniają warunek (4).
Funkcja $id(A) = A$ dla $A \in E_0$ spełnia równość

$$l(id(A), id(B)) = 1 \cdot l(A,B)$$

więc spełnia warunek (4) ze stałą $m = M = 1$.
Z definicji odwzorowania f wynika istnienie odwzorowania f^{-1}.

Niech f spełnia warunek (4), więc

$$ml\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right) \le l\left(ff^{-1}(A), ff^{-1}(B)\right) = l(A, B)$$

$$l(A, B) = l\left(ff^{-1}(A), ff^{-1}(B)\right) \le Ml\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right)$$

Stąd

$$\frac{1}{M} l(A, B) \le l\left(f^{-1}(A), f^{-1}(B)\right) \le \frac{1}{m} l(A, B)$$

To kończy dowód.

Stwierdzenie 3. Przekształcenie afiniczne przestrzeni afinicznej n-wymiarowej jest złożeniem izometrii i n powinowactw względem n podprzestrzeni n–1-wymiarowych parami ortogonalnych.

Przez k_1, k_2,...,k_n oznaczmy współczynniki powinowactw względem n–1-wymiarowych podprzestrzeni, na które rozkłada się przekształcenie afiniczne f, wówczas dla $A, B \in E_0$

$$\min\{k_1, k_2, ..., k_n\} l(A, B) \le l(f(A), f(B)) \le \max\{k_1, k_2, ..., k_n\} l(A, B)$$

Kładąc

$$m = \min\{k_1, k_2, ..., k_n\} \quad \text{i} \quad M = \max\{k_1, k_2, ..., k_n\}$$

otrzymujemy nierówność

$$ml(A, B) \le l(f(A), f(B)) \le Ml(A, B)$$

dla $A, B \in E_0$.

Zatem odwzorowania afiniczne spełniają warunek (4).

Z definicji (1.1), (1.2) zbioru A_t wynikają inkluzje:

$$S(p, r)_{a(r)} \subset \{x \in E; \quad r - a(r) \le \rho(p, x) \le r + a(r)\} \tag{5.1}$$

$$S(p, r)_{b(r)} \subset \{x \in E; \quad r - b(r) \le \rho(p, x) \le r + b(r)\} \tag{5.2}$$

Na ogół znaku zawierania nie można zastąpić znakiem równości. W przestrzeni afinicznej E jednak spełniony jest warunek:

Dla każdego punktu $p \in E$ dowolnej liczby $r > 0$ istnieje punkt $q \in E$ taki, że $\rho(p, q) = r$, który pozwala w związkach (5.1) i (5.2) znak inkluzji zastąpić znakiem równości.

Więc

$$S(p,r)_{a(r)} = \{x \in E; \quad r - a(r) < \rho(p,x) < r + a(r)\}$$

$$S(p,r)_{b(r)} = \{x \in E; \quad r - b(r) < \rho(p,x) < r + b(r)\}$$

Zatem

$$l(A \cap \{x; r - a(r) < \rho(p,x) < r + a(r)\}, B \cap \{x; r - b(r) < \rho(p,x) < r + b(r)\}) =$$
$$= l(A \cap S(p,r)_{a(r)}, B \cap S(p,r)_{b(r)})$$

Załóżmy, że

$$\frac{1}{r^k} l(A \cap S(p,r)_{a(r)}, B \cap S(p,r)_{b(r)}) \to 0 \qquad \text{dla} \qquad r \to 0 \tag{6}$$

to dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich t_1, t_2

$$\frac{1}{r^k} l(A \cap \{x; t_1(r - a(r)) < \rho(p,x) < t_2(r + a(r))\}, B \cap \{x; t_1(r - b(r)) <$$
$$< \rho(p,x) < t_2(r + b(r))\})_{r \to 0^+} \to 0$$

Niech f będzie odwzorowaniem spełniającym warunek (4).

Stwierdzenie 4. Jeśli $(A,B) \in T_l(a,b,k,p)$ i spełniony jest warunek (6), funkcja f spełnia warunek (4), to $(f(A), f(B)) \in T_l(a,b,k,f(p))$.

Dowód. Dla dowodu załóżmy $(A,B) \in T_l(a,b,k,p)$, to znaczy para (A,B) jest (a,b)-skupiona w punkcie p i

$$\frac{1}{r^k} l(A \cap S(p,r)_{a(r)}, B \in S(p,r)_{b(r)}) \to 0, \qquad \text{gdy} \qquad r \to 0^+$$

Z warunku (6) mamy dla $t_1 = \frac{1}{M}$ i $t_2 = \frac{1}{m}$

$$\frac{1}{r^k} l\left(A \cap \left\{x; \frac{1}{M}(r - a(r)) < \rho(p,x) < \frac{1}{m}(r + a(r))\right\}, B \cap \left\{x; \frac{1}{M}(r - b(r)) <\right.\right.$$
$$\left.\left. < \rho(p,x) < \frac{1}{m}(r + b(r))\right\}\right) \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$$

Dla $A \in E_0$ i punktu $p \in E$ oraz $r > 0$

$$f(A) \cap S(p,r)_{a(r)} = \{f(x); x \in A \ \ r - a(r) < \rho(f(p), f(x) < r + a(r))\}$$

Z warunku (4)

$$m\rho(p,r) \leq \rho\big(f(p), f(x) \leq M\rho(p,x)\big)$$

mamy

$$\frac{1}{M}\rho\big(f(x), f(p)\big) \leq \rho(p,x) \leq \frac{1}{m}\rho\big(f(x), f(p)\big)$$

Więc

$$\frac{1}{M}\big(r - a(r)\big) < \rho(p,x) < \frac{1}{m}\big(r + a(r)\big) \qquad \text{dla} \qquad x \in A$$

Analogicznie

$$\frac{1}{M}\big(r - b(r)\big) < \rho(p,x) < \frac{1}{m}\big(r + b(r)\big) \qquad \text{dla} \qquad x \in B$$

Uwzględniając nierówności, otrzymujemy

$$\frac{1}{r^k} l\big(f(A) \cap S(p,r)_{a(r)}, f(B) \cap S(p,r)_{b(r)}\big) =$$

$$= \frac{1}{r^k} l\left(f(x); \frac{1}{M}\big(r - a(r)\big) < \rho(p,x) < \frac{1}{m}\big(r + a(r)\big), \left\{ f(x); \frac{1}{M}\big(r - b(r)\big) < \right.\right.$$

$$\left.\left. < \rho(p,x) < \frac{1}{m}\big(r + a(r)\big) \right\}\right) \leq M \frac{1}{r^k} l\left(A \cap \left\{ x; \frac{1}{M}\big(r - a(r)\big) < \rho(p,x) < \right.\right.$$

$$\left.\left. < \frac{1}{m}\big(r + a(r)\big) \right\}, B \cap \left\{ x : \frac{1}{m}\big(r - b(r)\big) < \rho(p,x) < \frac{1}{M}\big(r + b(r)\big) \right\} \right) \xrightarrow[r \to 0^+]{} 0$$

Wynika stąd prawdziwość stwierdzenia 4.

Literatura

[1] Grochulski J., Konik T., Tkacz M., On the equivalence of certain relations of tangency of arcs in metrics space, Demonstratio Mathematica 1978, Vol. XI, 2, 261-271.

[2] Grochulski J., Konik T., Tkacz M., On some relations of tangency of arcs in metric spaces, Demonstratio Mathematica 1978, Vol. XI, No 3, 567-581.

[3] Grochulski J., Some properties of tangency relations, Demonstratio Mathematica 1995, Vol. XXVIII, No 2, 361-367.

[4] Waliszewski W., On the tangency of sets in a generalizet metric spaces, Ann. Pol. Math. 1973, 28, 275-284.