

## ANALIZA STATECZNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ RUCHU WLEWKA COS

Anita Ciekot<sup>1</sup>, Ryszard Parkitny<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Częstochowska

<sup>2</sup>Instytut Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Częstochowska

**Streszczenie.** Sformułowano uproszczone równania ruchu prostoliniowego wlewka ciągłego odlewania. Określono stateczność rozwiązań tego równania, uzależniając ją od prędkości odlewania oraz intensywności wymiany ciepła w strefie pierwotnego i wtórnego chłodzenia.

### 1. Uproszczone równania ruchu

Rozważamy ruch wlewka ciągłego odlewania wymuszony ruchem oscylującym krystalizatora. Krystalizator ma zadany ruch harmoniczny  $\delta = \delta_0 \sin(\omega t)$ . Oddziałuje on na wlewek określonym obciążeniem podłużnym  $s(x, t)$ , przypadającym na jednostkę długości. Obciążenie to jest rezultatem sumarycznych oddziaływań normalnych krzepnącej warstwy wlewka na krystalizator oraz warunków tarcia pomiędzy wlewkiem i krystalizatorem [1, 2]. Siła wyciągania wlewka jest realizowana na rolkach ciągnących. Rolki są dociskane do wlewka siłą normalną i poprzez współczynnik tarcia tocznego realizują określoną siłę wyciągania. Prędkość kątowa rolek jest dobierana tak, aby uzyskać określoną prędkość wyciągania wlewka  $w_0$  (prędkość odlewania). Przy stałej prędkości kątowej rolek w przypadku gdy nie występuje poślizg, mamy do czynienia ze stałą prędkością odlewania. W celu ustalenia równań drgań wlewka rozważymy jego infinitezymalny element ograniczony przekrojami  $x$  i  $x + dx$ , jak na rysunku 1. Równanie ruchu rozważanego elementu ma postać

$$dmp = -N(x, t) + N(x, t) + \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} dx + s(x, t) dx \quad (1)$$

przy czym:

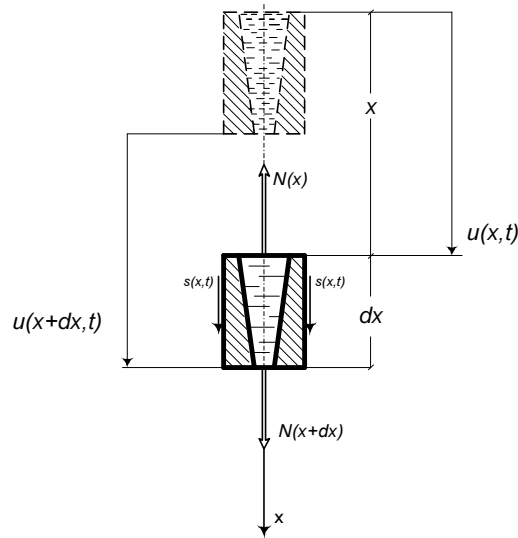
$dm = (\rho^l A^l + \rho^s A^s) dx$  - masa elementu wlewka,

$p = p(x, t) = \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2w_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + w_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  - przyspieszenie,

$N(x, t)$  - siła podłużna,

$\rho^l, \rho^s$  - odpowiednio gęstość fazy ciekłej i stałej wlewka,

$A^l, A^s$  - odpowiednio pole przekroju części ciekłej i stałej wlewka.



Rys. 1. Element wlewka wraz z obciążeniami

Przyjmując masę elementu wlewka w zadanej postaci, zakładamy, że przemieszczenia części ciekłej i stałej są jednakowe. Ponadto zakładamy, że całkowite obciążenie wlewka przenosi wyłącznie część zakrzepła wlewka. Przyjmujemy, że jest ona ciałem lepkosprężystym o liniowej charakterystyce sprężystej i lepkiej, określonej odpowiednio modułem sprężystości podłużnej  $E^s$  i współczynnikiem lepkości dynamicznej  $\mu^s$ . Siłę podłużną wlewka określamy zależnością

$$N(x, t) = \int_{\frac{a}{2} - \eta(x)}^{\frac{a}{2}} \sigma_x y dy \quad (2)$$

gdzie  $\sigma_x = E^s(T(x, y))(\varepsilon_x - \varepsilon_x^0) + \mu^s(T(x, y))\dot{\varepsilon}_x$ .

Podstawiając odpowiednio zależności na przyspieszenie i siłę podłużną do równania (1), otrzymujemy równanie ruchu dla drgań wymuszonych:

$$\begin{aligned} (\rho^s A^s + \rho^l A^l) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = D_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + D_2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_3(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ + D_4(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + D_5(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + s(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie współczynniki  $D_i(x)$  są następującej postaci:

$$\begin{aligned}
D_1(x) &= \left( \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial \mu^s}{\partial x} y dy - 2(\rho^s A^s + \rho^l A^l) w_0 \right) \\
D_2(x) &= \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} E^s y dy + w_0 \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial \mu^s}{\partial x} y dy - (\rho^s A^s + \rho^l A^l) w_0^2 \\
D_3(x) &= \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E^s}{\partial x} y dy, \quad D_4(x) = \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \mu^s y dy, \quad D_5(x) = w_0 \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \mu^s y dy
\end{aligned}$$

Warunki brzegowe równania określa swobodny koniec wlewka oraz jego utwierdzenie w miejscu działania rolek ciągnących, co daje:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. u(x,t) \right|_{x=L} = 0 \quad (4)$$

Warunki początkowe wynoszą:

$$\left. u(x,t) \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{du_0(x,t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

## 2. Numeryczne rozwiązanie równania ruchu

W ogólnym przypadku przybliżonego rozwiązania szczególnego równania ruchu wymuszonego (równania różniczkowego niejednorodnego) poszukuje się w postaci szeregu według funkcji własnych postaci

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t) U_i(x) \quad (6)$$

gdzie:  $U_i(x) = \cos\left(\left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} x\right)$  znane funkcje własne [2].

Przewidywane rozwiązanie podstawiamy do równania ruchu (3). Mnożymy równanie ruchu kolejno przez wszystkie funkcje własne i całkujemy w przedziale określoności  $(0, L)$ . Po niezbędnych przekształceniach otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na nieznane funkcje czasu  $S_i(t)$  w następującej postaci:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \ddot{S}_i = \sum_{i=1}^n (b_{ij} \dot{S}_i + c_{ij} S_i) + d_j \quad (7)$$

gdzie:  $j = 1, 2, \dots, n$ , a współczynniki występujące w równaniu są następujące:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^L (\rho^l A^l(x) + \rho^s A^s(x)) U_i(x) U_j(x) dx \\ b_{ij} &= \int_0^L \frac{d\mu^s}{dx} (\rho^l A^l(x) + \rho^s A^s(x)) U_i'(x) U_j(x) dx + \\ &\quad - 2w_0 \int_0^L (\rho^l A^l(x) + \rho^s A^s(x)) U_i'(x) U_j(x) dx + \\ &\quad + \int_0^L \mu^s(x) (\rho^l A^l(x) + \rho^s A^s(x)) U_i''(x) U_j(x) dx \\ c_{ij} &= \int_0^L \left( \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} E^s y dy \right) U_i''(x) U_j(x) dx + \\ &\quad + w_0 \int_0^L \frac{d\mu^s}{dx} (\rho^l A^l + \rho^s A^s) U_i''(x) U_j(x) dx + \\ &\quad - 2w_0^2 \int_0^L (\rho^l A^l + \rho^s A^s) U_i''(x) U_j(x) dx + \\ &\quad + \int_0^L \left( \int_{\frac{a}{2}-\eta(x)}^{\frac{a}{2}} \frac{\partial E^s}{\partial x} y dy \right) U_i'(x) U_j(x) dx + \\ &\quad + w_0 \int_0^L \mu_s(x) (\rho^l A^l + \rho^s A^s) U_i'''(x) U_j(x) dx \\ d_j &= \int_0^L s(x, t) U_j(x) dx \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ względem drugich pochodnych, otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{S}_i = \sum_{i=1}^n (G_{ij} \dot{S}_i + H_{ij} S_i) + K_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Z przeprowadzonych testów wynika, że w obliczeniach praktycznych wystarczy brać pod uwagę tylko dwa pierwsze wyrazy szeregu; zliczanie następnych członów szeregu (8) praktycznie nie ma znaczenia (wielkości te są bardzo małe). Rozpisując współczynniki występujące w tym równaniu dla dwóch wyrazów szeregu, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= \frac{b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & G_{12} &= \frac{b_{21}a_{22} - b_{22}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 G_{21} &= \frac{b_{12}a_{11} - b_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & G_{22} &= \frac{b_{22}a_{11} - b_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 H_{11} &= \frac{c_{11}a_{22} - c_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & H_{12} &= \frac{c_{21}a_{22} - c_{22}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 H_{21} &= \frac{c_{12}a_{11} - c_{11}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & H_{22} &= \frac{c_{22}a_{11} - c_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
 K_1 &= \frac{d_1a_{22} - d_2a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & K_2 &= \frac{d_2a_{11} - d_1a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Układ taki rozwiązujemy numerycznie metodą Rungego-Kutty-Mersona.

### 3. Stateczność ruchu. Przykłady obliczeń

Stateczność rozwiązania układu (8) wyznaczamy na podstawie znajomości części rzeczywistych pierwiastków równania charakterystycznego [1, 3]. Rozwiązanie jest stateczne, jeśli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste. Jeżeli między pierwiastkami znajduje się chociażby jeden z dodatnią częścią rzeczywistą, to ruch jest niestateczny. Równanie charakterystyczne w analizowanym przypadku ma postać

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ H_{11} & H_{12} & G_{11} - \lambda & G_{12} \\ H_{21} & H_{22} & G_{21} & G_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

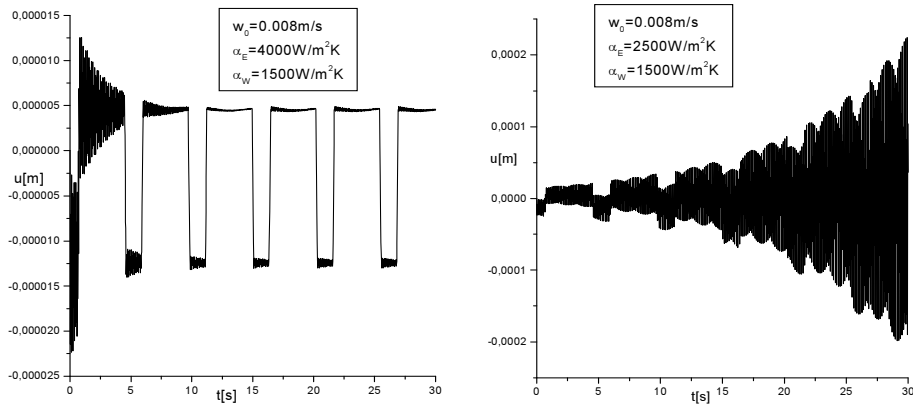
Obliczenia wykonano dla następujących wartości parametrów układu:  $E = 2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho^s = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\delta_0 = 0,01 \text{ m}$ ,  $\omega = 1,2 \text{ 1/s}$ ,  $L = 8,0 \text{ m}$ ,  $L_{kr} = 0,7 \text{ m}$ ,  $L_s = 8 \text{ m}$ ,  $\lambda_M = 349 \text{ W/mK}$ ,  $T_E = 323 \text{ K}$ ,  $T_K = 1808 \text{ K}$ ,  $T_w = 293 \text{ K}$ ,  $a = 0,14 \text{ m}$ ,  $h_M = 0,04 \text{ m}$ ,  $\lambda_M = 349 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda = 29 \text{ W/mK}$ ,  $\beta = 800 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,  $c = 800 \text{ J/kgK}$ .

Siła styczna wyraża się wzorem

$$s(x, t) = (f - f_{sr})g\rho_l \frac{a}{2} x \quad (11)$$

gdzie  $f_{sr} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} (f_k + (f_s - f_k)e^{-\alpha|v|}) \operatorname{sgn}(v) dt$ , a  $\rho_l$  jest gęstością fazy ciekłej wlew-

ka,  $g$  przyspieszeniem ziemskim,  $a$  wymiarem poprzecznym wlewka,  $f_s, f_k$  to odpowiednio współczynnik tarcia statycznego i kinetycznego, a  $v$  prędkością względną wlewka względem krystalizatora. Rysunek 2 przedstawia przemieszczenia wlewka dla obszarów statecznego i niestatecznego.



Rys. 2. Przemieszczenie wlewka dla  $x = L_{kr}$

## Literatura

- [1] Osiński Z., Teoria drgań, PWN, Warszawa 1978.
- [2] Gudaszari E.G., Panowko G.Ja., Teorija wibracionnych technologiczeskich processow pri niekulonowom trienii, Nauka, Moskwa 1988.
- [3] Gutowski R., Równania różniczkowe zwyczajne, WNT, Warszawa 1971.